問題：整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}\,(n = 1, 2, 3, \dots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

解答：

$$a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}\,(n = 1, 2, 3, \dots)$$

において、

$n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= 19^1 + (-1)^0 \cdot 2^{4-3} \\ &= 19 + 2 \\ &= 21 \\ &= 7 \times 3 \end{aligned}$$

$n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_2 &= 19^2 + (-1)^1 \cdot 2^{8-3} \\ &= 361 + 32 \\ &= 329 \\ &= 7 \times 47 \end{aligned}$$

よって、整数 a_n をすべて割り切る素数は 7 であると推測される。ここで、すべての自然数において a_n は 7 で割り切れることを数学的帰納法によって示す。

「整数 a_n は 7 で割り切れる」を (A) とする。

[1] $n = 1$ のとき

$$a_1 = 21 = 7 \times 3$$

よって、$n = 1$ のとき (A) は成り立つ。

[2] $n = k$ のとき

a_k が 7 で割り切れると仮定する。このとき、

$$a_k = 7p \qquad \text{(p は整数)}$$

とすると、

$$19^k + (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} = 7p$$

よって

$$19^k = 7p - (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} \tag{1}$$

$n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 19^{k+1} + (-1)^k \cdot 2^{4(k+1)-3} \\ &= 19^{k+1} + (-1)^k \cdot 2^{4k+1} \\ &= 19 \cdot 19^k + (-1)^k \cdot 2^{4k+1} \end{aligned}$$

ここで、式 (1) より

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 19 \cdot \{7p - (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3}\} + (-1)^k \cdot 2^{4k+1} \\
&= 7 \cdot 19p - 19(-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} + (-1)^k \cdot 2^{4k+1} \\
&= 7 \cdot 19p - 19(-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} + (-1)^k \cdot 2^4 \cdot 2^{4k-3} \\
&= 7 \cdot 19p - 19(-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} + (-1)^k \cdot 16 \cdot 2^{4k-3} \\
&= 7 \cdot 19p - (19+16) \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} \\
&= 7 \cdot 19p - 35 \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3} \\
&= 7\{19p - 5 \cdot (-1)^{k-1} \cdot 2^{4k-3}\}
\end{aligned}
$$

したがって、 $n = k+1$ のときにも (A) は成り立つ。
[1][2] より、すべての自然数 n で (A) は成り立つ。（証明終）
以上より、整数 $a_n = 19^n + (-1)^{n-1}2^{4n-3}\ (n = 1, 2, 3, \dots)$ のすべてを割り切る素数は 7 である。